

สาระการเรียนรู้

1. ประพจน์
2. การเชื่อมประพจน์
3. สัจนิรันดร์ และความขัดแย้ง
4. ประพจน์ที่สมมูลกัน
5. การหาความจริงของการเชื่อมประพจน์

จุดประสงค์การเรียนรู้

1. อธิบายและบอกความหมายของประพจน์
2. อธิบายและบอกความหมายของตัวเชื่อม
3. อธิบายความหมายและบอกถึงความสำคัญของ
ของสัจนิรันดร์
4. สามารถเขียนและอธิบายประพจน์ที่สมมูลกัน
5. สามารถเขียน หรือ สามารถพิสูจน์ประพจน์
ที่สมมูลกัน

สาระสำคัญ

ตรรกศาสตร์เป็นส่วนหนึ่งที่อยู่ในส่วนของการประมวลผลข้อมูลทางด้านคอมพิวเตอร์ ในการคำนวณ จะเน้นเชิงของเหตุและผล ตามหลักการของพีชคณิตบูลีน ซึ่งจะได้ผลลัพธ์เพียงค่าเดียวคือค่าจริงหรือค่าเท็จ

ประพจน์

(*Proposition or Statement*)

หมายถึง ประโยคหรือข้อความที่มีค่า
ความเป็นจริง หรือเท็จเพียงค่าใดค่าหนึ่งเท่านั้น
ซึ่งอาจอยู่ในประโยคบอกเล่าหรือประโยค
ปฏิเสธก็ได้ แต่ข้อความที่ไม่จัดเป็นลักษณะ
ของประพจน์จะเป็นข้อความหรือประโยค
ประเภท คำถาม คำสั่ง อ้อนวอน ขอร้อง อุทาน
ห้ามหรือแสดงความปรารถนา

ประพจน์

กลุ่มข้อความที่จัดว่าเป็นประพจน์ :

กลุ่มข้อความที่เป็นประ โยคบอกเล่าและปฏิเสธ

ประโยค	ค่าประพจน์
กรุงเทพเป็นเมืองหลวงของประเทศไทย	จริง
นกไม่มีปีก	เท็จ
$4+5$ มีค่าเท่ากับ 9	จริง
จังหวัดอุดรธานีไม่ได้อยู่ในภาคอีสาน	เท็จ

ประพจน์

กลุ่มข้อความที่ไม่จัดว่าเป็นประพจน์ :

กลุ่มข้อความที่เป็นประโยคคำถาม คำสั่ง อ้อนวอน
ขอร้อง อุทาน ห้าม แสดงหรือปรารภณา

ประโยค	ประเภท
50 คุณด้วย 40 มีค่าเท่ากับเท่าไร	คำถาม
หยุดเดี๋ยวนี้นะ	คำสั่ง
อย่าส่งเสียงดังในเวลาทำงาน	ห้าม
กรุณาปิดไฟทุกครั้งก่อนออกจากห้อง	ขอร้อง
ได้โปรดเถอะนะถือว่าสงสารฉันหน่อย	อ้อนวอน
ว้าย ! ตะเถรตกกระโณ	อุทาน
อยากให้บรรยากาศเช่นนี้สำหรับเราสองคนจังเลย	ปรารภณา

การเชื่อมประพจน์ (*Connectives*)

ประพจน์จะให้ค่าความจริง (*True*) หรือเท็จ (*False*)

หากมีการเชื่อมประพจน์หลายประพจน์ด้วยตัวเชื่อม (*Connectives*) เข้าด้วยกันก็อาจจะทำให้ค่าของประพจน์เปลี่ยนไป หรือคงเดิมก็ได้

1. การเชื่อมด้วยตัวเชื่อม “และ”

ตารางค่าความจริง (*Truth table*) ของ
ตัวเชื่อม “และ” (*Conjunction Connective*)

สัญลักษณ์ที่ใช้ คือ Λ ซึ่งทำหน้าที่เชื่อม
ประพจน์เข้าด้วยกัน และให้ผลลัพธ์เป็นจริง
ต่อเมื่อทุกประพจน์ที่เชื่อมเข้ามามีค่าความจริง
เป็นจริง หากมีประพจน์ใดมีค่าเป็นเท็จ ก็จะไม่
ได้ผลลัพธ์เป็นเท็จ

P	Q	$P \Lambda Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

ตัวอย่างการเชื่อมประพจน์ “และ”

$$P \wedge Q = ?$$

1. หาก P แทน $2+3=5$ (T) , Q แทน $7>6$ (T)

ดังนั้น $P \wedge Q$ แทน $2+3 = 5$ และ $5 > 4$ (T)

2. หาก P แทน $5+4=9$ (T) , Q แทน $6>9$ (F)

ดังนั้น $P \wedge Q$ แทน $5+4 = 9$ และ $6 > 9$ (F)

3. หาก P แทน $2-2=1$ (T), Q แทน $5 > 2$ (T)

ดังนั้น $P \wedge Q$ แทน $2-2 = 1$ และ $5>2$ (F)

4. หาก P แทน $8-2= 3$ (F) ,Q แทน $8 \times 2 = 15$ (F)

ดังนั้น $P \wedge Q$ แทน $8-2=3$ และ $8 \times 2 = 15$ (F)

2. การเชื่อมด้วยตัวเชื่อม “หรือ”

ตารางค่าความจริง (*Truth table*) ของ
ตัวเชื่อม “หรือ” (*Disjunction Connective*)
โดยมีสัญลักษณ์ $\vee$ ซึ่งให้ผลลัพธ์จะเป็นเท็จ
ก็ต่อเมื่อทุกประพจน์เชื่อมเข้ามามีค่าเป็นเท็จ
และหากมีประพจน์ใดมีค่าเป็นจริง ก็จะได้
ผลลัพธ์เป็นจริง

P	Q	$P \vee Q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

ตัวอย่างการเชื่อมประพจน์ “หรือ”

$$P \vee Q = ?$$

1. หาก P แทน $3+5=8$ (T) , Q แทน $2<9$ (T)

ดังนั้น $P \vee Q$ แทน $2+5 = 7$ หรือ $2 < 9$ (T)

2. หาก P แทน $3 \times 5 = 15$ (T) , Q แทน $7-5=6$ (F)

ดังนั้น $P \vee Q$ แทน $3 \times 5 = 15$ หรือ $7-5=6$ (T)

3. หาก P แทน $5-6=1$ (F) , Q แทน $5>4$ (T)

ดังนั้น $P \vee Q$ แทน $5 - 6 = 1$ หรือ $5 > 4$ (T)

4. หาก P แทน $2 \times 6 = 15$ (F) , Q แทน $9+2=13$ (F)

ดังนั้น $P \vee Q$ แทน $2 \times 6 = 15$ หรือ $9+2=13$ (F)

การเชื่อมด้วยตัวเชื่อม “ถ้า...แล้ว”

ตารางค่าความจริง (*Truth table*) ของ
ตัวเชื่อม “ถ้า...แล้ว” (*Conditional Connective*)
มีสัญลักษณ์ เป็น $\rightarrow$

ตัวเชื่อมนี้จะให้ประพจน์เป็นเท็จกรณีเดียว
คือ ประพจน์ตัวแรกเป็นจริง

P	Q	$P \rightarrow Q$
T	T	F
T	F	F
F	T	T
F	F	T

ตัวอย่างการเชื่อมประพจน์ “ถ้า..แล้ว”

1. หาก P แทน $6 > 2$ (T) , Q แทน $5 < 2$ (F)

ดังนั้น $P \rightarrow Q$ แทน ถ้า $6 > 2$ (T) แล้ว $5 < 2$ (F)

2. หาก P แทน $7 + 4 = 10$ (F) , Q แทน $4 \times 5 = 10$ (F)

ดังนั้น $P \rightarrow Q$ แทน ถ้า $7 + 4 = 10$ แล้ว $4 \times 5 = 10$ (T)

3. หาก P แทน $8 + 3 = 14$ (F) , Q แทน $4 + 5 = 10$ (F)

ดังนั้น $P \rightarrow Q$ แทน ถ้า $8 + 3 = 14$ แล้ว $4 + 5 = 10$ (T)

การเชื่อมด้วยตัวเชื่อม “...ก็ต่อเมื่อ...”

ตารางค่าความจริง (*Truth table*) ของ
ตัวเชื่อม “...ก็ต่อเมื่อ ...” (*Bi-conditional
Connective*) มีสัญลักษณ์เป็น $\leftrightarrow$

ตัวเชื่อมนี้ จะให้ผลลัพธ์เป็นจริง ซึ่งใน
กรณีที่ค่าความจริงของประพจน์ที่เชื่อมกัน มีค่า
ความจริงเหมือนกัน แต่หากประพจน์ที่เชื่อม
กันนั้นมีค่าความจริงต่างกัน ผลลัพธ์ที่ได้จะ
เป็นเท็จ

P	Q	$P \leftrightarrow Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T



ตัวอย่างการเชื่อมประพจน์ “...ก็ต่อเมื่อ...”

1. หาก P แทน 4 หารด้วย 2 ลงตัว (T) ,
Q แทน 4 เป็นเป็นเลขคู่ (T)

ดังนั้น $P \leftrightarrow Q$ แทน 4 หารด้วย 2 ลงตัว ก็
ต่อเมื่อ 4 เป็นเป็นเลขคู่ (T)

2. หาก P แทน -3 เป็นจำนวนเต็ม (T) ,
Q แทน -3 เป็นจำนวนนับ (F)

ดังนั้น $P \leftrightarrow Q$ แทน -3 เป็นจำนวนเต็ม ก็ต่อเมื่อ
-3 เป็นจำนวนนับ (F)

3. หาก P แทน 9 หารด้วย 2 ลงตัว (F) ,
Q แทน 9 เป็นเป็นเลขคี่ (T)

ดังนั้น $P \leftrightarrow Q$ แทน 9 หารด้วย 2 ลงตัว ก็
ต่อเมื่อ 9 เป็นเป็นเลขคู่ (F)

การเชื่อมด้วยตัวเชื่อม “ไม่”

ตารางค่าความจริง (*Truth table*) ของ
ตัวเชื่อม “ไม่” (*Not Connective*) หรือที่
เรียกว่า นิเสธ ของประพจน์นั้นมีสัญลักษณ์เป็น
~ ซึ่งตัวเชื่อมนี้จะ เปลี่ยนค่าความจริงเป็นค่า
ตรงข้าม

P	$\sim P$
T	F
F	T

ตัวอย่างการเชื่อมประพจน์ด้วย ไม่

1. หาก P แทน $9 \times 2 = 18$ (T), แทนค่า $\sim P$ (F)

2. หาก P แทน $10+1=12$ (F) , แทนค่า $\sim P$ (T)

ตัจนิรันดร์ (*Tautology*)

หมายถึง ประพจน์ที่มีค่าความจริงตลอดไป
ไม่ว่าค่าความจริงของประพจน์ย่อย ๆ ที่เป็น
ค่าตัวแปร จะมีค่าความจริงอย่างไร

ตัวอย่าง ตารางค่าความจริง เพื่อแสดงว่า

$P \rightarrow (P \vee Q)$ เป็นสัจนิรันดร์

P	Q	$P \vee Q$	$P \rightarrow (P \vee Q)$
T	T	T	T
T	F	T	T
F	T	T	T
F	F	F	T

จากประพจน์ข้างต้นถือว่าเป็นสัจนิรันดร์

เพราะ $P \rightarrow (P \vee Q)$ มีค่าความจริงเสมอ

และ $P \rightarrow (P \vee Q)$ เป็นสัจนิรันดร์

ความขัดแย้ง (Cpmtradocion)

หมายถึง ประพจน์ที่มีค่าความจริงเป็นเท็จเสมอ ไม่ว่าค่าความจริงของประพจน์ย่อย ๆ ที่เป็นตัวแปร จะมีค่าความเป็นจริงอย่างไร

ตัวอย่าง ตารางค่าความจริง เพื่อแสดงว่า
 $(P \wedge Q) \wedge (Q \rightarrow \sim P)$ เป็นความขัดแย้ง

P	Q	$P \wedge Q$	$\sim P$	$(Q \rightarrow \sim P)$	$(P \wedge Q) \wedge (Q \rightarrow \sim P)$
T	T	T	F	F	F
T	F	F	F	T	F
F	T	F	T	T	F
F	F	F	T	T	F

จากประพจน์ข้างต้นถือว่าเป็นความขัดแย้ง
 เพราะ $(P \wedge Q) \wedge (Q \rightarrow \sim P)$ มีค่าความเท็จเสมอ
 และ $(P \wedge Q) \wedge (Q \rightarrow \sim P)$ เป็นความขัดแย้ง

ประพจน์ที่สมมูลกัน

หมายถึง ค่าความจริงของประพจน์ 2

ประพจน์ ถ้ามีค่าความจริงเหมือนกัน กรณีต่อ
กรณี แล้วสามารถนำไปใช้แทนกันได้ เรียก
ประพจน์นั้นว่า เป็นรูปแบบที่สมมูลกัน

เช่น $P \rightarrow Q$ กับ $\sim P \vee Q$ ถือว่าเป็น
รูปแบบที่สมมูลกัน

ใช้สัญลักษณ์ $\equiv$ แทนการสมมูล และ

ใช้สัญลักษณ์ $\not\equiv$ แทนการไม่สมมูล

ตัวอย่างประพจน์ที่สมมูลกัน

ประพจน์ กรณีที่ 1	สมมูลกับ	ประพจน์ กรณีที่ 2
$\sim P$	$\equiv$	$P \rightarrow \sim P$
$\sim Q \vee Q$	$\equiv$	$\sim P \vee Q$
$\sim (P \rightarrow Q)$	$\equiv$	$P \wedge \sim Q$
$\sim (P \wedge Q)$	$\equiv$	$\sim P \wedge \sim Q$
$P \rightarrow Q$	$\equiv$	$\sim Q \rightarrow \sim P$
$\sim P \vee \sim Q$	$\equiv$	$\sim (P \vee Q)$
$\sim P \vee Q$	$\equiv$	$P \rightarrow Q$

ตัวอย่างไม่สมมูลกันของประพจน์

$P \vee Q$ สมมูลกับ $\sim P$ หรือไม่

P	Q	$P \vee Q$	$\sim P$
T	T	T	F
T	F	T	F
F	T	T	T
F	F	F	T

ผลการแสดงค่าความจริงของ

2

ประพจน์ พบว่า ไม่สมมูลกัน เพราะค่าความจริงใน 4 กรณี มีค่าความจริงที่ตรงกันเพียง 1 กรณี เท่านั้น

$\sim (P \wedge Q)$ สมมูลกับ $P \vee Q$ หรือไม่

P	Q	$P \vee Q$	$\sim (P \wedge Q)$
T	T	T	F
T	F	T	T
F	T	T	T
F	F	F	T

ผลการแสดงค่าความจริงของ 2

ประพจน์ พบว่า ไม่สมมูลกัน เพราะค่าความจริงใน 4 กรณี มีค่าความจริง ที่ตรงเพียง 2 กรณีเท่านั้น

การหาค่าความจริง ของประพจน์

ลำดับจากมากที่สุดเรียงลงมาตามลำดับ

สัญลักษณ์	ความหมาย	ขยายความหมาย
$\leftrightarrow$	ก็ต่อเมื่อ	มีค่าความจริงเป็นจริง เมื่อประพจน์ที่เชื่อมกันมีค่าความจริงเหมือนกัน
$\rightarrow$	ถ้า...แล้ว...	มีค่าความจริงเป็นเท็จ เมื่อประพจน์หน้าเป็นจริงและหลังเป็นเท็จ
$\wedge$	และ	มีค่าความจริงเป็นจริง เมื่อทุกประพจน์เป็นจริง ทั้งหมด
$\vee$	หรือ	มีค่าความจริงเป็นจริง เมื่อมีประพจน์ใดประพจน์หนึ่งเป็นจริง
$\sim$	ไม่	มีค่าความจริงตรงข้าม

1. การวิเคราะห์ด้วยตารางความจริง

ตัวอย่าง

จงหาค่าความจริงของประพจน์ $P \vee Q \rightarrow P$

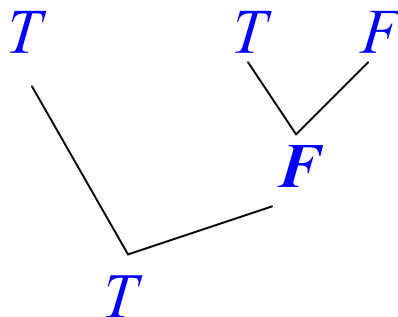
P	Q	$P \vee Q$	$P \vee Q \rightarrow P$
T	T	T	T
T	F	T	T
F	T	T	F
F	F	F	T

2. การวิเคราะห์ด้วยแผนภาพต้นไม้

ตัวอย่าง

จงหาค่าความจริงของประพจน์

$$P \rightarrow (Q \wedge R)$$



ดังนั้น $P \rightarrow (Q \wedge R)$