

สาระการเรียนรู้

1. พืชคณิตบูลีน

- 1.1 นิยามพืชคณิตบูลีน
- 1.2 คุณสมบัติพืชคณิตบูลีน
- 1.3 ทฤษฎีที่น่าสนใจของพืชคณิตบูลีน

2. ฟังก์ชันบูลีน

- 2.1 พืชคณิตสวิตชิง
- 2.2 การหาค่าของฟังก์ชันสวิตชิง

3. เกท

- 3.1 แอนด์เกต
- 3.2 ออร์เกต
- 3.3 น็อทเกต
- 3.4 แนนด์เกต
- 3.5 นอร์เกต
- 3.6 เอ็กซ์คลูซีฟออร์เกต

จุดประสงค์การเรียนรู้

1. บอกคุณสมบัติและทฤษฎีของพีชคณิตบูลีนได้
2. หาค่าฟังก์ชันของพีชคณิตบูลีน โดยใช้คุณสมบัติและทฤษฎีได้
3. หาค่าฟังก์ชันของพีชคณิตบูลีน โดยใช้ตารางค่าความจริงได้
4. เขียนเกตต่าง ๆ ได้
5. สามารถเขียนเกตเมื่อกำหนดนิพจน์ของวงจรโลจิกได้
6. เขียนนิพจน์ของวงจรโลจิกได้เมื่อกำหนดเกต

สาระสำคัญ

ในระบบคอมพิวเตอร์ นำตรรกศาสตร์มาช่วยในการจัดการควบคุมการทำงานของวงจรต่าง ๆ เพื่อนำไปสู่ระบบปฏิบัติการของคอมพิวเตอร์ ซึ่งตรรกศาสตร์ได้ถูกพัฒนาและคิดค้นขึ้นมาจากนักคณิตศาสตร์ชาวกรีกโบราณ คือ *Plato* และ *Aristotle* เพื่อใช้ในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ที่มีมากและซับซ้อน

พีชคณิตบูลีน

หน่วยวงจรที่เล็กที่สุดของเครื่องคอมพิวเตอร์ เรียกว่า เกท (*Gate* หรือ *Logic Gate*) และ เกทเป็นอุปกรณ์ทางอิเล็กทรอนิกส์ที่ก่อให้เกิดปฏิบัติการพีชคณิตบูลีนต่อหนึ่ง สัญญาณเข้า (*Input*) หรือมากกว่า เพื่อให้เกิดสัญญาณออก (*Out put*)

โดยที่สัญญาณเข้าและสัญญาณออกเป็นตัวแปรบูลีน (*Boolean Variable*) ซึ่งตัวแปรบูลีนแสดง 2 สถานะ คือ ปิดและเปิด ด้วยการใช้อำนาจ “1” แทนสถานะเปิด “0”

ในปี พ.ศ. 1849 นายจอร์จ บูล (*George Boole*) ได้ เสนอกฎเกณฑ์พีชคณิตบูลีน

นิยามพีชคณิตบูลีน

พีชคณิตบูลีน เป็นระบบพีชคณิตที่มี
คุณสมบัติปิด ซึ่งระบบนี้ประกอบด้วย เซต
 $K \neq \Psi$ และการดำเนินการ 2 อย่าง คือ

- (การคูณ) และ + (การหาผลรวม)

ซึ่งคุณสมบัติปิด คือสำหรับ

a และ b ใด ๆ ใน K จะได้ว่า

$$1) a + b \in K$$

$$2) a \bullet b \in K$$

คุณสมบัติของพีชคณิตบูลีน

1. กฎการมีจริงของ 1 และ 0

จะมี 1 และ 0 ในเซต k ที่ซึ่งสำหรับ a ใด ๆ ใน k จะได้ว่า

$$1.1 \quad a + 0 = a$$

$$1.2 \quad a \bullet 1 = a$$

คุณสมบัติของพีชคณิตบูลีน

2. กฎการสลับที่ (*Commutative Law*)

สำหรับ a และ b ใด ๆ ใน k ที่ซึ่ง

$$2.1 \quad a + b = b + a$$

$$2.2 \quad a \bullet b = b \bullet a$$

คุณสมบัติของพีชคณิตบูลีน

3. กฎการจัดกลุ่ม (*Associative Law*)

สำหรับ a และ b ใด ๆ ใน K ที่ซึ่ง

$$3.1 \quad a + (b + c) = (a + b) + c$$

$$3.2 \quad a \bullet (b \bullet c) = (a \bullet b) \bullet c$$

คุณสมบัติของพีชคณิตบูลีน

4. กฎการกระจาย (*Distribution Law*)

สำหรับ a และ b ใด ๆ ใน K ที่ซึ่ง

$$4.1 \quad a + (b \bullet c) = (a \bullet b) \bullet (a + c)$$

$$4.2 \quad a \bullet (b \bullet c) = a \bullet b + a \bullet c$$

คุณสมบัติของพีชคณิตบูลีน

5. กฎการมีจริงของส่วนเติมเต็ม

(The Law of Complementary Existence)

สำหรับ a ใด ๆ ใน K จะมีสมาชิก
เพียงตัวเดียว เรียกว่า a (ส่วนเติมเต็ม a หรือ
Complement of a) ใน K จะได้ว่า

$$5.1 \quad a + a' = 1$$

$$5.2 \quad a \cdot a' = 0$$

ทฤษฎีที่น่าสนใจของพีชคณิตบูลีน

ทฤษฎีที่ 1 นิจพล (*Idempotency*)

สำหรับ a ใด ๆ ใน K จะได้ว่า

$$1. \quad a + a = a$$

$$2. \quad a \bullet a = a$$

ทฤษฎีที่ 2

สำหรับ a ใด ๆ ใน K จะได้ว่า

$$1. \quad a + 1 = 1$$

$$2. \quad a \bullet 0 = 0$$

ฟังก์ชันบูลีน (Boolean Function)

กำหนดให้ $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ เป็นตัวแปรบูลีน (Boolean Function)

$f(X_1, X_2, X_3, \dots, X_n)$ เป็นตัวแปรบูลีน (Boolean Function)

ของตัวแปร $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$

การเขียนฟังก์ชันบูลีนจะเขียนอยู่ในรูปนิพจน์ของบูลีน เช่น

$$f(X_1, X_2, X_3) = X_1 X_2 + X_1 X_3 + X_2 X_3$$

1. พีชคณิตสวิตชิง (*Switching Algebra*) คือ
 พีชคณิตบูลีนที่มีสมาชิกของเซต k เพียง 2 ตัว คือ 0 และ 1
 สวิตชิงฟังก์ชัน (*Switching Function*) คือ
 $f(X_1, X_2, X_3, \dots, X_n)$ เป็นฟังก์ชันบูลีนของตัวแปร
 $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ ซึ่งฟังก์ชันบูลีนนี้อาจมีค่าเป็น 1 หรือ 0
 ขึ้นอยู่กับการกำหนดค่าตัวแปร $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ เป็น
 1 หรือ 0

ตัวอย่างที่ 1

จงหาค่าของ $f(X_1, X_2, X_3)$ เมื่อกำหนดให้

$$f(X_1, X_2, X_3) = X_1 X_2 + X_1 X_3 + X_1 X_3$$

$$\text{และ } X_1 = 1, X_2 = X_3 = 0$$

วิธีทำ

$$\begin{aligned} f(X_1, X_2, X_3) &= X_1 X_2 + X_1 \bar{X}_3 + X_1 \bar{X}_3 \\ &= 1 \bullet 0 + 1 \bullet 0 + 1 \bullet 0 \\ &= 1 \bullet 0 + 0 \bullet 0 + 1 \bullet 1 \\ &\quad \text{(เพราะ } 1 = \bar{0}, 0 = \bar{1}) \\ &= 1 \cdot 0 + 0 + 1 \quad \text{(ทฤษฎีที่ 2)} \\ &= (0 + 0) + 1 \quad \text{(ทฤษฎีที่ 2)} \\ &= 0 + 1 \quad \text{(กฎการจัดกลุ่ม, ทฤษฎีนิพจน์)} \\ &= 1 \quad \text{(กฎการมีจริงของ 1 และ 0)} \end{aligned}$$

ดังนั้น $f(X_1, X_2, X_3) = 1$

2. การหาค่าของฟังก์ชันบูลีน (*Switching Function*)

สามารถหาค่าได้ด้วยการใช้ตารางค่าความจริงใน
เรื่งตรรกศาสตร์โดย

$X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ แทน ประพจน์

● แทน $\wedge$

+ แทน $\vee$

$\overline{X}$ แทน $\sim$ (not) X

1 แทน ค่าความจริงเป็น “จริง”

0 แทน ค่าความจริงเป็น “เท็จ”

ตัวอย่างที่ 2 จงหาค่า $f(X_1, X_2) = X_1 \bullet X_2$

โดยใช้ตารางที่มีค่าความเป็น 1 หรือ 0

วิธีทำ

ขั้นที่ 1 ทำตารางค่าความจริงที่มีค่าความเป็นจริงและเท็จ

X_1	X_2	$X_1 \wedge X_2$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

ขั้นที่ 2 เปลี่ยนขั้นที่ 1 เป็นตารางความเป็น 1 และ 0

X_1	X_2	$X_1 \wedge X_2$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

จากตัวอย่างที่ 2 ตารางค่าความจริงของ

$$f(X_1, X_2) = X_1 \bullet X_2$$

สามารถหาค่า $f(X_1, X_2)$ ได้ทุกค่า นั่นคือ

ถ้า $X_1 = 1$ และ $X_2 = 1$ จะได้ว่า $f(X_1, X_2) = 1$

ถ้า $X_1 = 1$ และ $X_2 = 0$ จะได้ว่า $f(X_1, X_2) = 0$

ถ้า $X_1 = 0$ และ $X_2 = 1$ จะได้ว่า $f(X_1, X_2) = 0$

ถ้า $X_1 = 0$ และ $X_2 = 0$ จะได้ว่า $f(X_1, X_2) = 0$

ตัวอย่างที่ 3

จงหาค่าความจริงของฟังก์ชัน $f(x_1, x_2, x_3)$

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 x_3 + \bar{x}_1 \bar{x}_2 + x_1 x_2 x_3$$

ใช้ตารางค่าความจริง

$x_1 x_2 x_3$	x_1	x_2	x_3	$x_1 x_2 x_3$	$x_1 x_2$	$x_1 x_2 x_3$	$f(x_1, x_2, x_3) =$ $x_1 x_2 \bar{x}_3 + \bar{x}_1 \bar{x}_2 + x_1 x_2 x_3$
1 1 1	0	0	0	0	0	1	1
1 1 0	0	0	1	1	0	0	1
1 0 1	0	1	0	0	0	0	0
1 0 0	0	1	1	0	0	0	0
0 1 1	1	0	0	0	0	0	0
0 1 0	1	0	1	0	0	0	0
0 0 1	1	1	0	0	1	0	1
0 0 0	1	1	1	0	1	0	1

ตัวอย่างที่ 4

กำหนดให้ $f_1(x_1, x_2) = \overline{x_1 + x_2}$ และ

$$f_2(x_1, x_2) = \bar{x}_1 \bullet \bar{x}_2$$

จงแสดงว่า $f_1(x_1, x_2) = f_2(x_1, x_2)$

$x_1 \ x_2$	$\bar{x}_1$	$\bar{x}_2$	$x_1 + x_2$	$\overline{x_1 + x_2}$	$\bar{x}_1 \bullet \bar{x}_2$
1 1	0	0	1	0	0
1 0	0	1	1	0	0
0 1	1	0	1	0	0
0 0	1	1	0	1	1

จะเห็นว่า $\overline{x_1 + x_2} \approx \bar{x}_1 \bullet \bar{x}_2$

นั่นคือ $\overline{x_1 + x_2} = \bar{x}_1 \bullet \bar{x}_2$

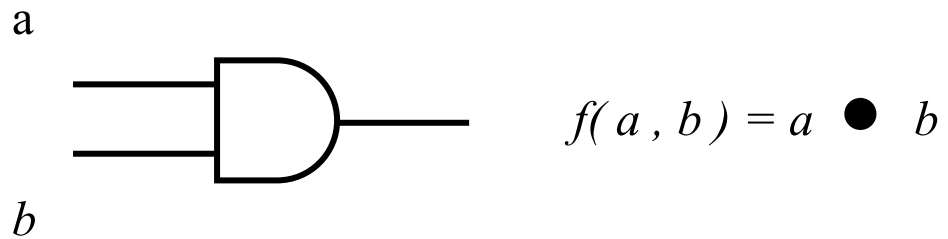
เกท (Gate)

เป็นอุปกรณ์ทางอิเล็กทรอนิกส์
ที่มีสัญญาณเข้า (*Input*) หนึ่งสัญญาณ หรือ
มากกว่า และสัญญาณออก (*Output*) เป็น
ฟังก์ชันบูลีน

แอนด์เกต (*AND Gate*)

เป็นอุปกรณ์ทางอิเล็กทรอนิกส์ที่ก่อให้เกิด
ปฏิบัติการทางพีชคณิตที่มีตัวดำเนินการ คือ
แอนด์ (*AND*) ซึ่งวงจรตรรกะนี้มีสัญญาณเข้า
ตั้งแต่ 2 สัญญาณ ซึ่งจะได้สัญญาณออก
(*Output*) เพียง 1 สัญญาณ

สัญลักษณ์



ตารางค่าความจริง

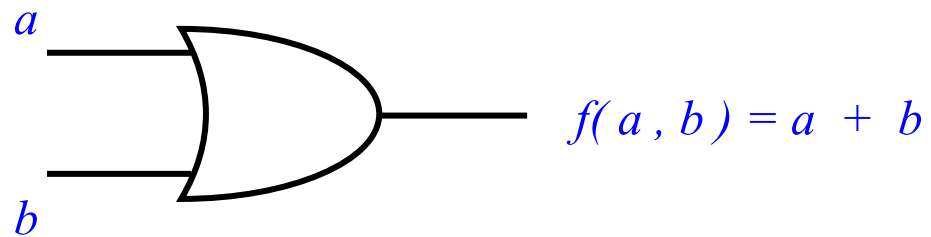
a	b	$a \bullet b$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

สัญญาณออกของแอนด์เกต เป็น “1” (สัญญาณมีค่าสูง)
 ก็ต่อเมื่อสัญญาณเข้าเป็น “1” (สัญญาณมีค่าสูง) ทั้งหมด

1. ออร์เกต (OR Gate)

เป็นวงจรตรรกะ (*Logic Gate*) ที่ทำให้เกิดปฏิกิริยาทางพีชคณิตบูลีน ที่มีตัวดำเนินการคือ ออร์ และวงจรตรรกะนี้มีสัญญาณเข้าตั้งแต่ 2 สัญญาณ และสัญญาณออก 1 สัญญาณ

สัญลักษณ์



ตารางค่าความจริง

a	b	a + b
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

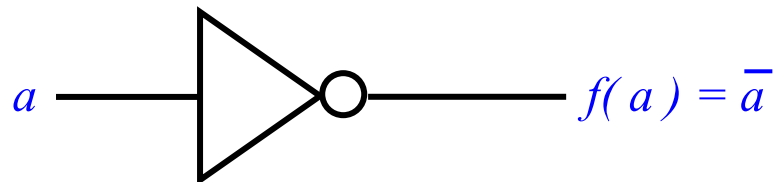
สัญญาณออกจะเป็น “0” (สัญญาณมีค่าต่ำ) ก็ต่อเมื่อ
สัญญาณเข้าเป็น “0” ทั้งหมด (สัญญาณมีค่าต่ำ)

2. น้อยทเกต (*NOT Gate*)

หรือ *Inverter*

เป็นวงจรตรรกะที่ทำให้เกิดปฏิกิริยาทางพีชคณิตที่มีตัวดำเนินการ คือ น้อย วงจรนี้จะมีสัญญาณเข้า และออก เพียง อย่างละ สัญญาณ และ สัญญาณออกจะเป็นส่วนเติมเต็มของสัญญาณเข้า

สัญลักษณ์



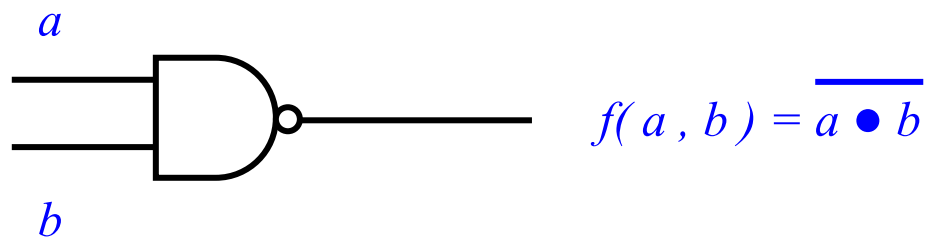
ตารางค่าความจริง

a	$f(a)$
1	0
0	1

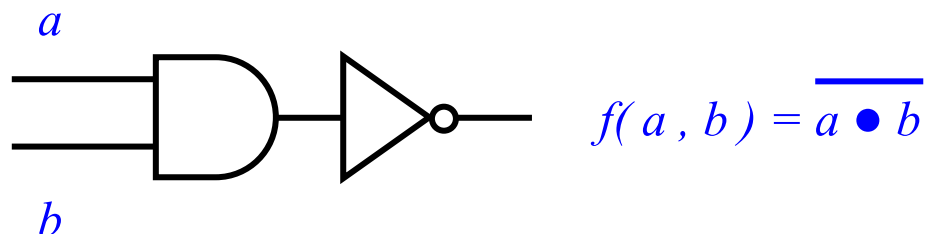
3. แนนด์เกต (*Nand Gate*)

วงจรนี้เป็นการรวมของแอนด์เกตและน็อตเกต

สัญลักษณ์



เนื่องด้วย แนนด์เกต เป็นการรวมของ
แอนด์เกตและน็อตเกต จึงสามารถเขียน
สัญลักษณ์อีกแบบหนึ่งได้



ตารางค่าความจริง

สำหรับแนนด์เกต ดังนี้

a	b	$\overline{a} \overline{b}$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	1

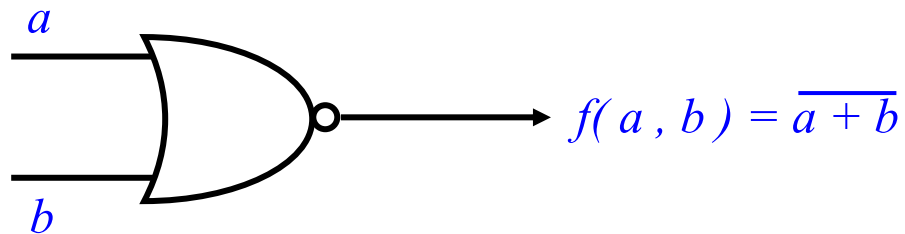
สัญญาณออกเป็น “0”

ก็ต่อเมื่อสัญญาณเข้าเป็น “1” ทั้งหมด

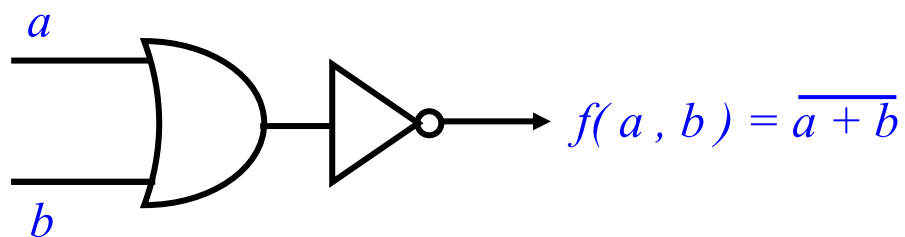
4. นอร์เกต (*NOR Gate*)

เป็นอุปกรณ์ทางอิเล็กทรอนิกส์ที่รวมของ
ออร์เกตและน็อตเกต

สัญลักษณ์



หรือสัญลักษณ์ของออร์เกตกับน็อตเกต



ตารางค่าความจริง

a	b	$\overline{a + b}$
1	1	0
1	0	0
0	1	0
0	0	1

สัญญาณออกเป็น “1” ก็ต่อเมื่อ
สัญญาณเข้าเป็น “0” ทั้งหมด

5. เอ็กส์คลูซีฟออร์เกต

(Exclusive OR Gate)

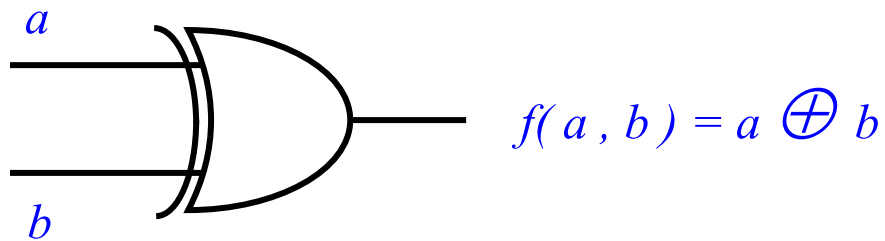
เป็นอุปกรณ์ทางอิเล็กทรอนิกส์ที่ก่อ
ปฏิบัติการทางพีชคณิตบูลีน ที่ถูกกำหนดด้วย
ตารางค่าความจริงต่อไปนี้

a	b	$a \oplus b$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

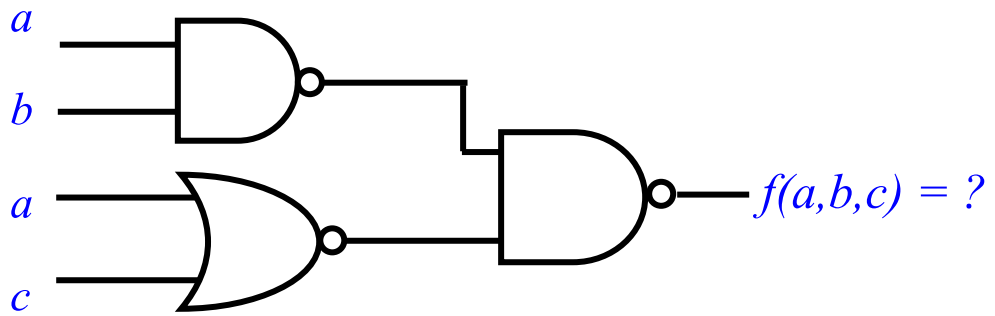
จากตาราง จะได้ว่า

1. สัญญาณออก (*Output*) จะเป็น “1”
ก็ต่อเมื่อสัญญาณเข้า (*Input*) แตกต่างกัน
2. สัญญาณออก (*Output*) จะเป็น “0”
ก็ต่อเมื่อสัญญาณเข้าเท่ากัน

สัญลักษณ์



ตัวอย่างที่ 4 จงเขียนวงจรลอจิกต่อไปนี้



$$f(a, b, c) = \overline{P_1 \cdot P_2}$$

$$P_1 = \overline{ab}$$

$$P_2 = \overline{a + c}$$

$$f(a, b, c) = (ab) + (a + c)$$